نمونه رایگان جزوه

آمار و کاربرد آن در مدیریت

(فصل دوم)

تالیف: دکتر حسن رضاپور

پشتیبانی:

www.pourshafi.com

فصل دوم: آنالیز ترکیبی

(imp)

نماد فاکتوریل: حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با نماد $n!$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد: $0!=1$

– مثال: عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{(m-1)!}{(n+2)(n+1)(n)(n-n!)}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ب) $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n^2-n$

اصل اساسی شمارش: اگر عملی به n_1 طریق مختلف به دنبال آن عملی به n_2 طریق مختلف و متعاقب آن عمل سومی به n_3 طریق مختلف و... انجام شود، تعداد طرقی که این اعمال با یکدیگر انجام می‌شوند، از رابطه زیر بدست می‌آید.

$n_1 \times n_2 \times n_3$ (ضرب، اشتراک و)

– مثال: تعداد طرقی که هر یک از موارد زیر انجام می‌شوند را بدست آورید؟

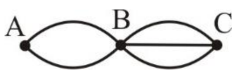
الف) پرتاب دو سکه $\boxed{2}\times\boxed{2}=4$

ب) پرتاب سه سکه $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}=8$

ج) پرتاب دو سکه و یک تاس $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{6}=24$

د) پرتاب دو تاس $\boxed{6}\boxed{6}=36$

هـ) رفتن از شهر A به C $\boxed{2}\boxed{3}=6$



– مثال: با اعداد ۱، ۵، ۶، ۷ و ۸ با تکرار و بدون تکرار ارقام.

الف) چند عدد سه رقمی

با تکرار: $\boxed{5}\times\boxed{5}\times\boxed{5}=125$

بدون تکرار: $\boxed{5}\times\boxed{4}\times\boxed{3}=60$

با تکرار: $\boxed{5}\times\boxed{5}\times\boxed{3}=75$

بدون تکرار: $\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{3}=36$

ج) چند عدد سه رقمی زوج:

با تکرار: $\boxed{5}\times\boxed{5}\times\boxed{2}=50$

بدون تکرار: $\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{2}=24$

د) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۷۰۰

با تکرار: $\boxed{2}\times\boxed{5}\times\boxed{5}=50$

بدون تکرار: $\boxed{2}\times\boxed{4}\times\boxed{3}=24$

– مثال ۲: با اعداد ۱و ۵و۶و۷و۰ با تکرار و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد سه رقمی

با تکرار : $\boxed{4}\times\boxed{5}\times\boxed{5}=100$

بدون تکرار : $\boxed{4}\times\boxed{4}\times\boxed{3}=48$

ب) چند عدد سه رقمی زوج

با تکرار : $\boxed{4}\times\boxed{5}\times\boxed{2}=40$

بدون تکرار : $\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{1}+\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{1}=12+9=21$

ج) چند عدد سه رقمی فرد

با تکرار : $\boxed{4}\times\boxed{5}\times\boxed{3}=60$

بدون تکرار : $\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{4}=27$

د) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۷۰۰

با تکرار : $\boxed{1}\times\boxed{5}\times\boxed{5}=25-1=24$

بدون تکرار : $\boxed{1}\times\boxed{4}\times\boxed{3}=12$

جایگشت n شیئی: تعداد طرقی که n شیئ می‌تواند در کنار هم قرار گیرندرا جایگشت n شئ نامیم و از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$P(n)=n!$

– مثال: با سه حرف c,b,a چند کمله سه حرفی می‌توانیم بنویسیم؟

$P(3)=3!=3\times2\times1=6$

تذکر ۱) تعداد طرقی که n نفر دور یک میزگرد قرار می‌گیرند از رابطه $(n-1)!$ بدست می‌آید.

مثال: سه نفر به چند طریق دو ریک میزگرد قرارمی‌گیرند؟ $(3-1)!=2!=2$

مثال: دو دانشجوی فوق لیسانس و ۳ دانشجوی لیسانی به چند طریق می‌توانند:

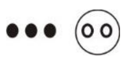
الف) در یک ردیف قرار گیرند؟ $5!=120$

ب) به گونه‌ای در کنار هم قرار گیرند که دانشجویان لیسانس در کنار هم باشند.

$3!\times3!=36$

برای جابجایی لیسانسها

ج) به گونه‌ای که دانشجویان فوق لیسانی در کنار هم باشند.



$4!\times2!=24\times2=48$

!۲ برای جابجایی فوقها با هم

د) دانشجویان هم مقطع در کنار هم باشند. $2!\times3!\times2!=24$

هـ) لیسانسه‌ها در کنار هم نباشند.

د) فوق لیسانسها در کنار هم نباشند. $120-48=72$ **ج – الف**

تذکر ۲) اگر n شیئ شامل n_1 از نوع اول، n_2 از نوع دوم و... n_k از نوع kام با شد، آنگاه تبدیل n شی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

مثال: با سه حروف aab چند کلمه سه حرفی می‌توانیم بنویسیم؟

$$\frac{3!}{2!1!}=3$$

ترتیب r شیئ از n شیئ $(r\le n)$:

تعداد طرقی که r شـیئ، از n شـیئ را می‌توانیم انتخاب نمائیم به گونه‌ای که جابجایی اشـیاء حالت جدید را به وجود بیاورد. (ترتیب قرارگرفتن اهمیت دارد) را ترتیب r شیئ از n شیئی گفته واز رابطه زیر بدست می‌آوریم.

$$P_n^r=(n)_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تذکر ۱) اصل اساسی شمارش از ترتیب کاملتر بوده و عملاً ترتیب کاربردی ندارد.

تذکر ۲) ترتیب r شیئ از n شیئ شامل جایگشت‌های بدون تکرار r شیئ از n شیئ است.

تذکر ۳) جایگشت‌های با تکرار r شیئی از n شیئ از دستور n^2 بدست می‌آید.

تذکر ۴) ترتیب n شیئ از n شیئ برای تبدیل n شیئ است و یا:

ترتیب = جایگشت بدون تکرار $\qquad P(n)=P_n^n$

مثال: با اعداد ۱و۴و۵و۶و۷ با تکرار و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی می‌توانیم بنویسیم؟

با تکرار $\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}=125 \qquad n^3=5^3=125$

بدون تکرار $\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}=60 \qquad P_5^3-\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$

ترکیب r شیئ از n شیئ $(r\le n)$: تعداد طرقی که r شیئ از n شیئ را می‌توانیم انتخاب نمائیم به گونه‌ای که جابجایی اشـیاء حالت جدید را بوجود نیاورد (ترکیب انتخاب اهمیت دارد) را ترکیب r شـیئ از n شـیئ گفته و از دسـتور زیر بدسـت می‌آوریم:

$$C_n^r=\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تذکر ۱) برای تشـــخیص مســـئله ترتیب و ترکیب بدون توجه به n,r دو شـــیئ را انتخاب نموده و جابجا می‌کنیم، اگر حالت جدیدی بوجود آید مسئله از نوع ترتیب ا ست (ترتیب قرارگرفتن اهمیت دارد). و اگر حالت جدیدی بوجود نیامد، مسئله از نوع ترکیب است. (ترکیب انتخاب مهم است)

حسابداری و مدیریت ۹۲) با حروف average چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟

غیر تکراری $\binom{5}{4}\times4!=120$

تکراری
$$\begin{cases} aa\binom{4}{2}=\binom{4}{2}\times\frac{4!}{2!}=72 \\ ee\binom{4}{2}=\binom{4}{2}\frac{4!}{???}=72 \\ aaee=\frac{4!}{2!2!}=6 \end{cases}$$

$$120+72+72+6=270$$

مثال: اعداد ۱تا ۹، ساخت اعداد ۵ رقمی: $n=9, r=5$

$2,1,1,2 \leftarrow$ «ترتیب»

مثال- افراد ۱ تا ۹، ساخت گروه ۵ نفری: $n=9, r=5$

جابجایی حالت جدیدی بوجود نمی‌آورید ← ترکیب.

تذکر ۲:

$$1)\binom{n}{n}=1 \qquad 2)\binom{n}{0}=1 \qquad 3)\binom{n}{n}=1 \qquad 4)\binom{n}{1}=n \qquad 5)\binom{n}{n-1}=n$$

$$6)\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad 7)\, s+t=n \Rightarrow \binom{n}{s}=\binom{n}{t}\binom{8}{3}=\binom{8}{5} \qquad 8)\, r!C_n^2=P_n^2 \qquad 9)\, C_n^r=\frac{1}{r!}P_n^r$$

تذکر: تعداد طرقی که n شـیئ یکسـان را می‌توان در k محل قرار داد بطوریکه هیچ محلی بدون شـیئ نباشـد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

– **مثال:** در یک جعبه ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب قرار دارد. به چند طریق می‌توانیم:

الف) سه لامپ انتخاب نمائیم.

$$n=10 \rightarrow \binom{10}{3}=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\times 9\times x^4}{3\times 2}=120$$

ب) سه لامپ را انتخاب کنیم به گونه‌ای که هیچیک معیوب نباشد؟

$$\binom{4}{0}\times\binom{6}{3}=1\times\frac{6!}{3!3!}=20$$

ج) فقط یکی معیوب باشد (از سه لامپ)

$$\binom{4}{1}\times\binom{6}{2}=4\times\frac{6!}{2!4!}=2\times 6\times 5=60$$

د) حداقل یکی معیوب باشد. (از سه لامپ)

$x=$ تعداد معیوب

حداقل $\leftarrow a \le x \le b \rightarrow$ حداکثر

$$(x \ge 1): \binom{4}{1}\binom{6}{2} + \binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3}\binom{6}{0} = A$$

$$\text{کل حالات}: \binom{10}{3} = \overbrace{\binom{4}{1}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3}\binom{6}{0}}^{A} + \binom{4}{0}\binom{6}{3}$$

$$\to A = \binom{10}{3} - \binom{4}{0}\binom{6}{3} = 120 - 20 = 100$$

هـ) حداکثر یکی معیوب باشد

$$x \le 1 \qquad \binom{4}{0}\binom{6}{3} + \binom{4}{1}\binom{6}{2} = 20 + 60 = 80$$

و) حداکثر دو تا معیوب باشد

نکته: ⁕تعداد حالات توزیع :

n گلوله متمایز در r کیسه متمایز برابرست با r^n

⁕ n گلوله مشابه در r کیسه متمایز برابرست با $\binom{n+r-1}{r-1}$ که با تعداد جوابهای صحیح و **نامنفی** معادله $(x_1 + ... + x_2 = n)$ $x_i \ge 0$ نیز برابرست.

⁕ n گلوله مشابه در r کیسه که هر کیسه حداقل یک گلوله بگیرد که با تعداد جوابهای صحیح و **مثبت** معادله $(x_1 + ... + x_2 = n)$, $x_i > 0$ برابرست را میتوان از رابطه زیر یافت:

$$\binom{n-1}{r-1}$$